Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 1

30 de octubre de 2023

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

22 páginas

8823 – 7221

Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Manon está estudiando el crecimiento de un tipo determinado de concha marina. Al final de cada mes, Manon registra el aumento de la anchura de una concha marina desde el final del mes anterior.

Con esos datos, ella modeliza el aumento mensual de la anchura de la concha marina mediante una progresión geométrica cuya razón común es $0{,}8$. Durante el primer mes, la anchura de la concha marina aumenta $4\,\text{mm}$.

(a) Halle cuánto aumentará la anchura de la concha marina durante el tercer mes, según su modelo. [2]

(b) Halle el aumento total de la anchura de la concha marina durante el primer año, según lo que predice el modelo de Manon. [2]

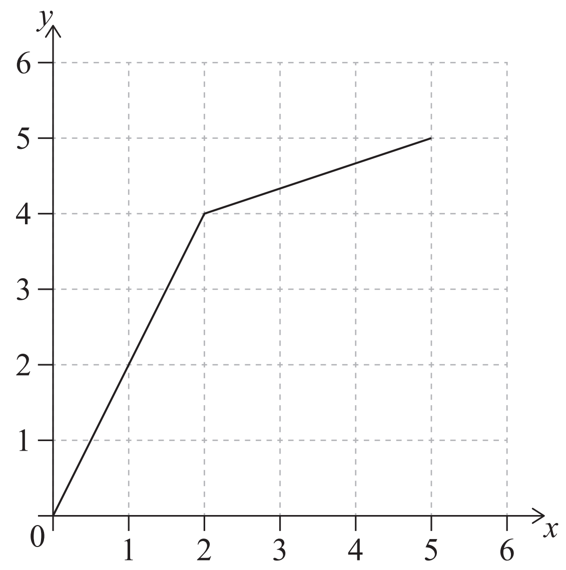
La concha marina de Manon tenía una anchura de $25\,\text{mm}$ al comienzo del primer mes.

(c) Halle la máxima anchura posible de la concha marina, según lo que predice el modelo de Manon. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2. [Puntuación máxima: 7]

El gráfico de la función f se muestra en la siguiente figura.



(a) Escriba $f(2)$. [1]

(b) En esos mismos ejes, dibuje aproximadamente $y = f^{-1}(x)$. [2]

La función g se define así: $g(x) = 3x - 1$.

(c) Halle una expresión para $g^{-1}(x)$. [2]

(d) Halle un valor de x para el cual se cumpla que $f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$. [2]

3. [Puntuación máxima: 6]

La Gran Pirámide de Guiza es la más antigua de las Siete Maravillas del Mundo Antiguo. Cuando se construyó, hace 4500 años, las dimensiones de la pirámide se medían en codos reales egipcios (REC).

[Fuente: Nina Aldin Thune. https://en.wikipedia.org/wiki/Great_Pyramid_of_Giza#/media/File:Kheops-Pyramid.jpg. Bajo licencia CC BY 2.5 https://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.es. Imagen adaptada.]

Viktor lee en Internet que $1\,\mathrm{REC}$ es igual a $0{,}52$ metros, redondeando a dos cifras decimales.

(a) Escriba los límites superior e inferior de $1\,\mathrm{REC}$ en metros. [2]

La Gran Pirámide de Guiza tiene base cuadrada, de $440\,\mathrm{REC}$ de lado, y una altura de $280\,\mathrm{REC}$. Viktor supone que estas dos medidas son exactas y que la Gran Pirámide se puede modelizar como una pirámide de base cuadrada y caras lisas.

(b) Halle, en metros cúbicos, el mínimo volumen posible de la pirámide. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

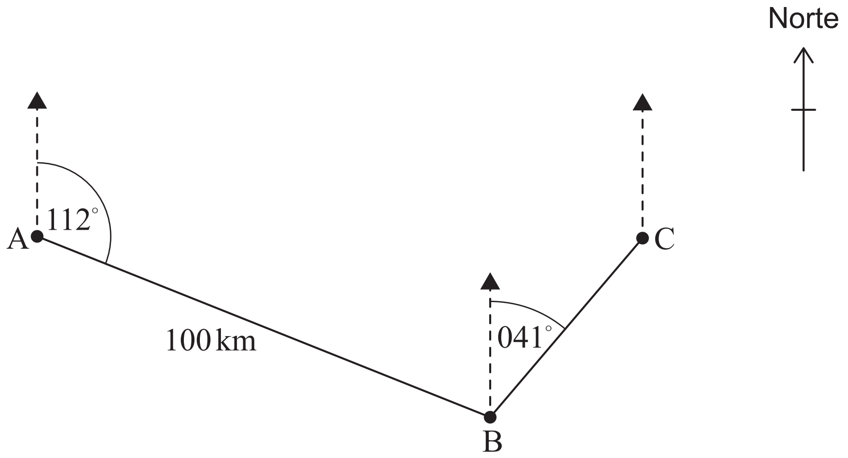
. . . .

. . . .

4. [Puntuación máxima: 6]

Jason navega con su barco desde el punto A una distancia de $100\,\mathrm{km}$, con rumbo de 112°, para llegar al punto B. Luego navega con un rumbo de 041° hasta el punto C. El viaje de Jason se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle $\mathrm{A\hat{B}C}$. [2]

El punto C está justo al este del punto A.

(b) Calcule la distancia que navega Jason para volver directamente del punto C al punto A. [4]

. . . .

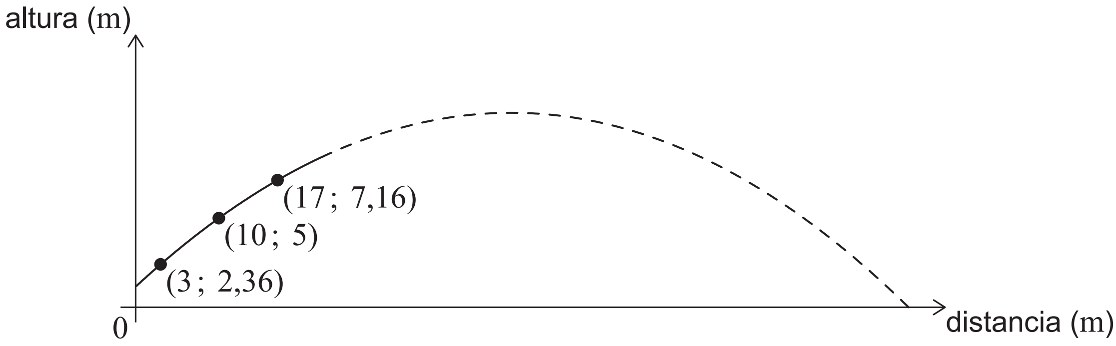
5. [Puntuación máxima: 9]

Un deportista, que está en un campo de deportes de forma horizontal, golpea una bola. La altura de la bola respecto al suelo (en metros) después del golpeo inicial se puede modelizar mediante una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x representa la distancia horizontal (en metros) que ha recorrido la bola respecto al jugador.

Una cámara especializada hace un seguimiento de la trayectoria inicial de la bola después de que el jugador la haya golpeado. La cámara detecta que la bola pasa por los tres puntos siguientes: $(3;\ 2{,}36)$, $(10;\ 5)$ y $(17;\ 7{,}16)$, tal y como se muestra en la **figura 1**.

la figura no está dibujada a escala

Figura 1



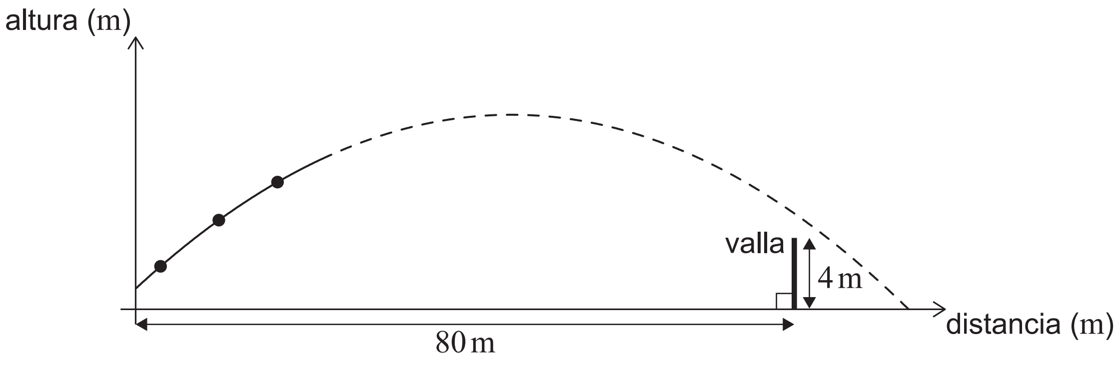
(a) Utilice las coordenadas $(3;\ 2{,}36)$ para escribir una ecuación en función de a, b, y c. [1]

(b) Utilice su respuesta en el apartado (a) y dos ecuaciones similares para hallar la ecuación del modelo cuadrático que representa la altura de la bola. [3]

Hay una valla de 4 metros de altura que está a 80 metros del lugar donde el jugador golpeó la bola, tal y como se muestra en la **figura 2**.

la figura no está dibujada a escala

Figura 2



(c) Muestre que el modelo predice que la bola pasará por encima de la valla. [3]

(d) Halle la distancia horizontal que recorrerá la bola —desde la posición del jugador hasta que toca el suelo— según este modelo. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 5: continuación)

6. [Puntuación máxima: 8]

En el siguiente diagrama de Voronoi, las coordenadas de tres granjas son $A(0, 3)$, $B(8, 3)$ y $C(8, 13)$, donde las distancias se miden en kilómetros. Cada granja posee los terrenos que están más cercanos de ella y sus límites están representados por las líneas de puntos del **diagrama 1**.

Diagrama 1

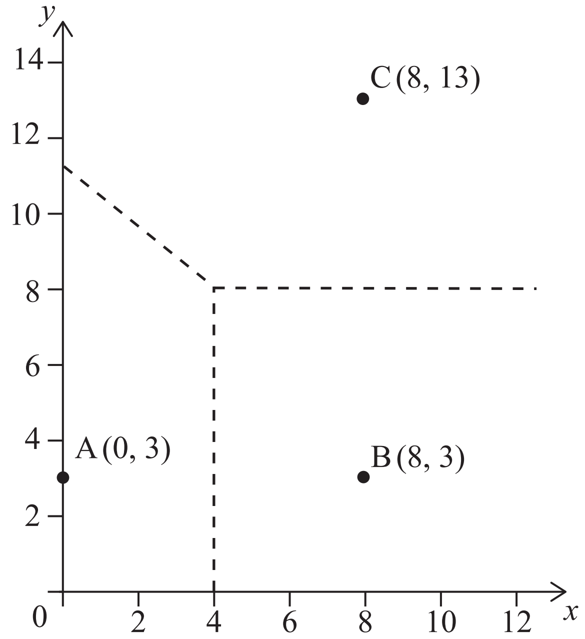
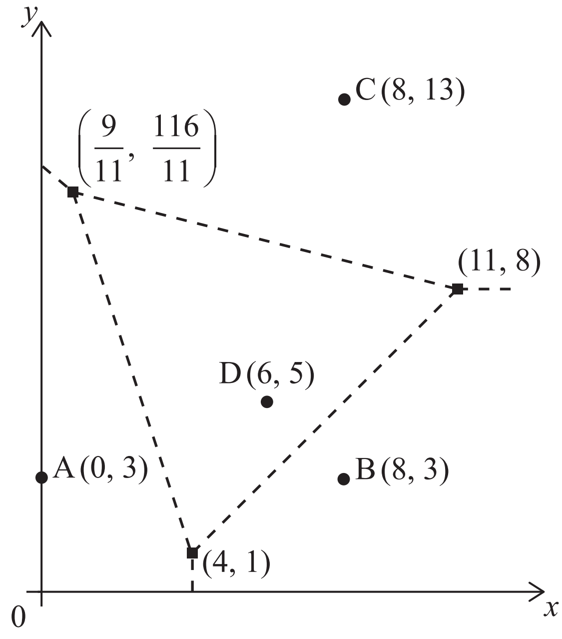


Diagrama 2



Para surtir de agua a las granjas se decide construir un pozo en el punto donde los límites coinciden en el **diagrama 1**.

(a) Escriba las coordenadas de este punto. [1]

(b) Halle la ecuación de la mediatriz de $[AC]$. [3]

Se construye otra granja $D(6, 5)$ en esos terrenos. Por ello, se ha vuelto a trazar el diagrama de Voronoi para mostrar los nuevos límites. Las coordenadas de los vértices de estos límites se indican en el **diagrama 2**.

Se va a construir una turbina eólica en uno de esos vértices.

(c) La turbina eólica debería estar lo más lejos posible de las granjas más cercanas.

(i) Calculando las distancias pertinentes, halle la ubicación de la turbina eólica.

(ii) A partir de lo anterior, escriba la distancia que hay entre la turbina eólica y la granja más cercana. [4]

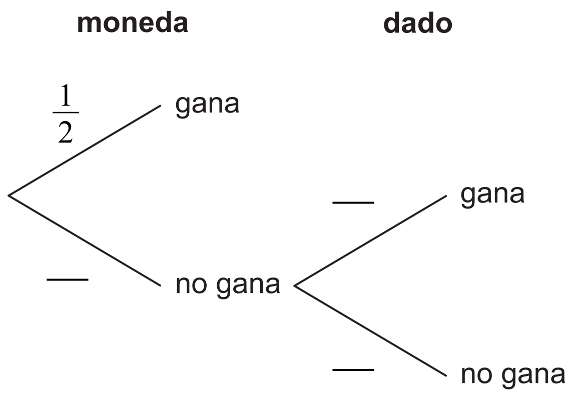
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 6: continuación)

7. [Puntuación máxima: 7]

Michèle está jugando a un juego. En ese juego, primero tiene que lanzar una moneda justa y ver si sale cara o cruz. Si sale cara, en ese caso gana el premio. Si sale cruz, aún tiene otra posibilidad de ganar, pero en ese caso tiene que tirar un dado justo de seis caras y sacar un cinco o un seis para poder ganar el premio.

(a) Complete el diagrama de árbol escribiendo las tres probabilidades que faltan. [2]



(b) Halle la probabilidad de que Michèle **no** gane el premio. [2]

(c) Sabiendo que Michèle ganó el premio, halle la probabilidad de que la moneda lanzada haya salido cara. [3]

8. [Puntuación máxima: 6]

Dado, $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

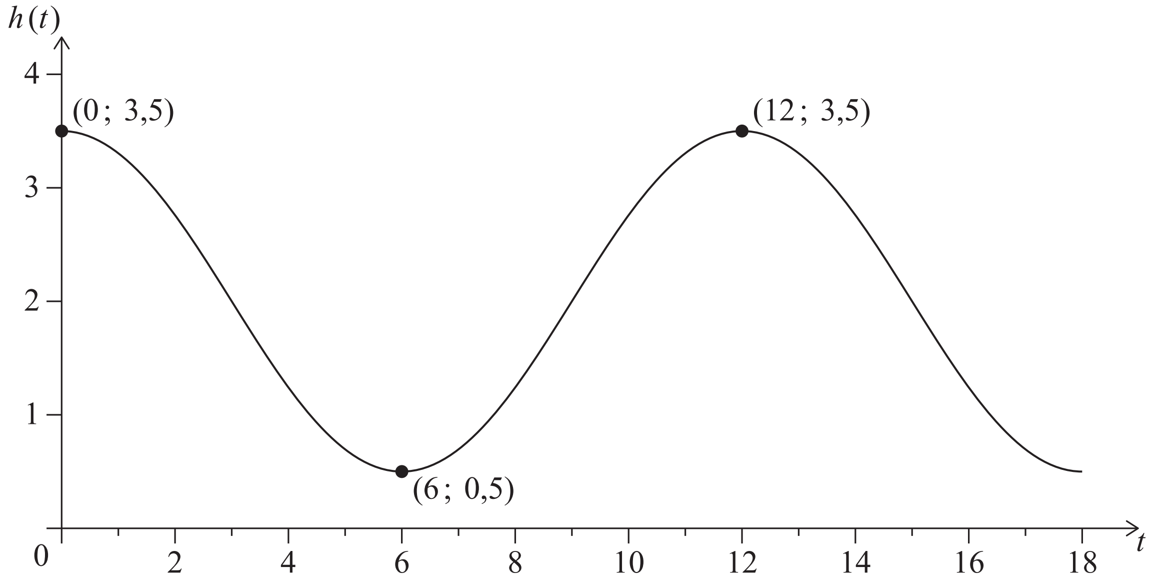
(a) Escriba z en la forma $z = r\mathrm{e}^{\theta \mathrm{i}}$, donde $r \in \mathbb{R}^{+}$, $-\pi < \theta \leq \pi$. [2]

Sean $z_1 = \mathrm{e}^{2t\mathrm{i}}$ y $z_2 = 2\mathrm{e}^{\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{i}}$.

(b) Halle $\mathrm{Im}(z_1 + z_2)$ en la forma $p\,\mathrm{sen}(2t + q)$, donde $p > 0$, $t \in \mathbb{R}$ y $-\pi \leq q \leq \pi$. [4]

9. [Puntuación máxima: 8]

Joon es un surfista aficionado y quiere modelizar las olas que pasan por un punto P en particular, que está frente a la orilla de su playa favorita. Joon plantea un modelo de las olas en función de $h(t)$, que es la altura del agua (en metros) y de t, que es el tiempo (en segundos) que ha transcurrido desde que empezó a medir la altura del agua en el punto P.



La función tiene esta forma: $h(t) = p\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + q$, $t \geq 0$.

(a) Halle los valores de p y q. [2]

(b) Halle:

(i) $h'(t)$.

(ii) $h''(t)$. [3]

Joon empezará a surfear la ola cuando la razón de cambio de h respecto a t en el punto P sea máxima. Esto sucederá por primera vez cuando $t = k$.

(c) (i) Halle el valor de k.

(ii) Halle la altura del agua en ese instante. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 9: continuación)

10. [Puntuación máxima: 7]

La desintegración de un isótopo químico a lo largo de cinco años se registra en la **tabla 1**. La masa (M) de la sustancia química se mide al comienzo de cada año t del experimento y se registra redondeando al número entero de gramos más próximo.

Tabla 1

Tiempo t (años)	1	2	3	4	5
Masa M (gramos)	1000	660	517	435	381

Se cree que la desintegración del isótopo se puede modelizar mediante una ecuación de la forma $M = a \times t^b$.

(a) Utilice la regresión potencial, en la calculadora de pantalla gráfica, para hallar el valor de a y el valor de b. [2]

Los valores de t y M se pueden transformar de modo que $x = \ln t$ e $y = \ln M$. La **tabla 2** muestra valores de x e y tras redondear a tres cifras decimales.

Tabla 2

x	0	0,693	1,099	1,386	1,609
y	6,908	6,492	6,248	6,075	5,943

(b) Halle la ecuación de la recta de regresión lineal de y sobre x, en la forma $y = cx + d$. Dé los valores de c y d redondeando a tres cifras decimales. [2]

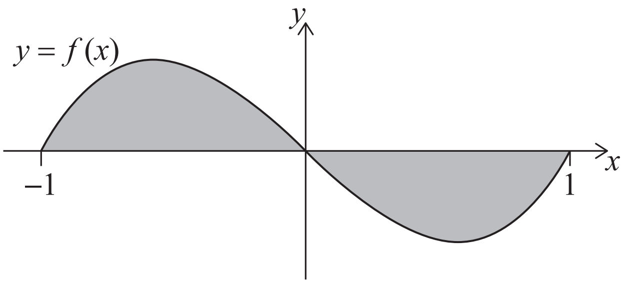
(c) A partir de lo anterior, muestre que esta regresión lineal es equivalente a la regresión potencial que halló en el apartado (a). [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 10: continuación)

11. [Puntuación máxima: 7]

Considere la función $f(x) = x^3 - x$, para $-1 \le x \le 1$. La región sombreada R está delimitada por el gráfico de $y = f(x)$ y el eje x.

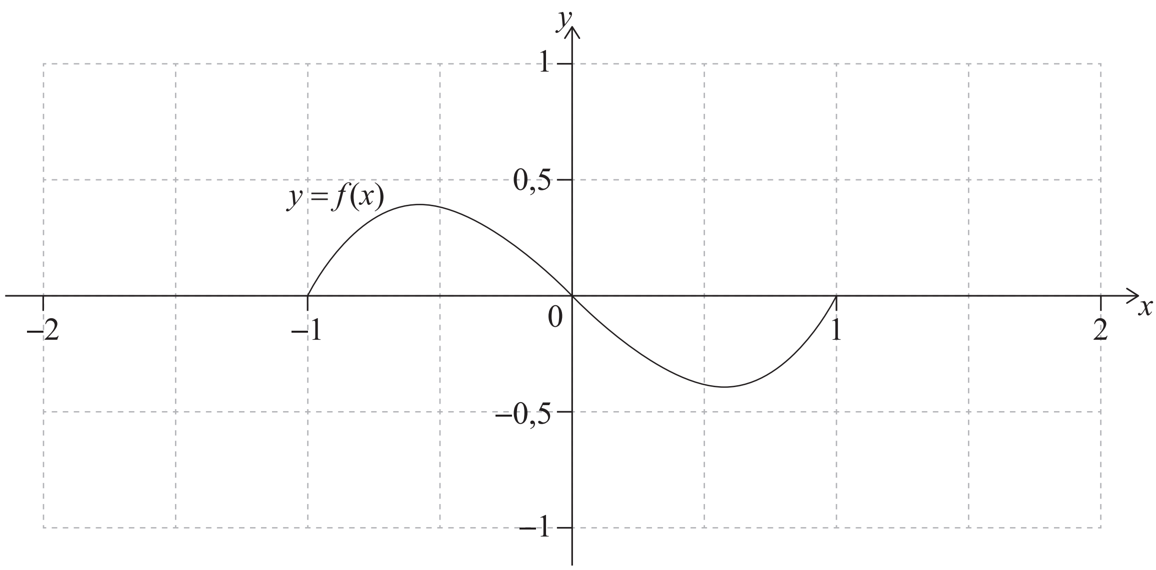


(a) (i) Escriba una integral que represente el área de R.

(ii) Halle el área de R. [2]

Sea g otra función que se define así: $g(x) = 2f(x-1)$.

(b) En los siguientes ejes de coordenadas se ha dibujado el gráfico de $y = f(x)$. En esos mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de $y = g(x)$. [2]



La región R del gráfico original $y = f(x)$ se rota 2π radianes alrededor del eje x para formar un sólido.

(c) Halle el volumen de dicho sólido. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 11: continuación)

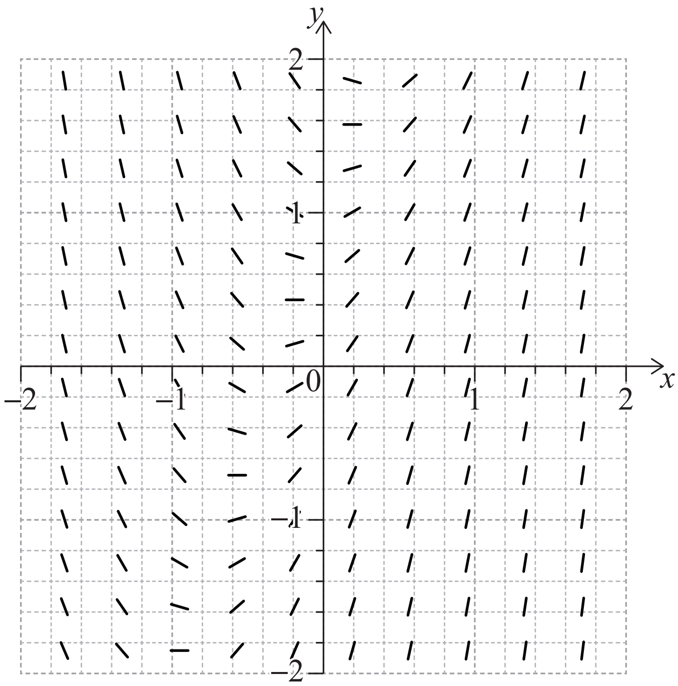
12. [Puntuación máxima: 4]

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x - y + 1$.

(a) Halle la ecuación de la tangente a la curva solución en el punto $(-1, -1)$; dé la respuesta en la forma $ax + by + c = 0$. [2]

El campo de direcciones correspondiente a esta ecuación diferencial se muestra en la siguiente figura.

(b) Dibuje aproximadamente la curva solución que pasa por el punto $(-1, -1)$. [2]



. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

13. [Puntuación máxima: 8]

La velocidad v en el instante t de una partícula que se mueve en línea recta se puede modelizar mediante la función definida por tramos:

$$v(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \le t \le T \\ u_2(t), & t \ge T \end{cases}$$

donde $u_1(t) = 2t^2 - t^3$ y $u_2(t) = 8 - 4t$. Es obligatorio que $u_1(T) = u_2(T)$.

(a) Halle el valor de T. [2]

(b) Muestre que $u_1'(T) = u_2'(T)$. [2]

El desplazamiento de la partícula en el instante $t = 0$ es cero.

(c) Halle el instante en que la partícula vuelve a su posición inicial. [4]

14. [Puntuación máxima: 7]

La recta L tiene por ecuación vectorial $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y el punto Q tiene por coordenadas $(11, -1, 3)$.

El punto P es el punto de L que más cerca está de Q.

(a) Halle las coordenadas de P. [4]

(b) Halle un vector que sea perpendicular a L y también a la recta que pasa por los puntos P y Q. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

15. [Puntuación máxima: 7]

Los hábitos alimenticios de los alumnos de un colegio se estudian a lo largo de unos cuantos meses. El objetivo principal del estudio es averiguar si los no vegetarianos se convierten en vegetarianos y si los vegetarianos siguen siendo vegetarianos.

Cada mes, los alumnos tienen que elegir entre las opciones de almuerzo vegetariano y no vegetariano. Una vez que han elegido una opción en ese mes, ya no pueden cambiar de opción hasta el mes siguiente.

En un mes cualquiera del estudio, se observa que la probabilidad de que un no vegetariano se convierta en vegetariano el mes siguiente es igual a $0{,}1$ y que la probabilidad de que un vegetariano siga siendo vegetariano el mes siguiente es igual a $0{,}8$.

Esta situación se puede representar mediante la matriz de transición

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

(a) Interprete el valor $0{,}9$ de $\boldsymbol{T}$ relacionándolo con los cambios en los hábitos alimenticios de los alumnos del colegio. [1]

(b) Halle los valores propios de la matriz $\boldsymbol{T}$. [3]

Uno de los vectores propios de $\boldsymbol{T}$ es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Halle otro vector propio (que no sea paralelo al anterior) e interprételo en contexto. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

16. [Puntuación máxima: 6]

Cuando Jef juega al baloncesto, el número de lanzamientos a canasta que realiza durante 6 minutos cualesquiera de juego se puede modelizar mediante una distribución de Poisson de media $2{,}5$.

(a) Halle la probabilidad de que Jef realice menos de 7 lanzamientos durante 12 minutos cualesquiera de juego. [2]

Se puede suponer que los resultados de los lanzamientos a canasta son independientes unos de otros y que la probabilidad de éxito de un lanzamiento es constante. La probabilidad de que Jef tenga éxito con un lanzamiento es igual a $0{,}4$.

Se puede suponer que la probabilidad de éxito de Jef con un lanzamiento es independiente del número de lanzamientos que realice.

(b) Halle la probabilidad de que durante 6 minutos cualesquiera de juego Jef realice menos de 4 lanzamientos y que entre al menos uno. [4]

Referencias:

3. Nina Aldin Thune. https://en.wikipedia.org/wiki/Great_Pyramid_of_Giza#/media/File:Kheops-Pyramid.jpg. Bajo licencia CC BY 2.5 https://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.es. Imagen adaptada.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.